離散型非単調ニューロンからなる連想記憶モデルの引込半径

矢内 浩文
玉川大学 工学部 情報通信工学科
〒 194 東京都町田市玉川学園 6-1-1
e-mail: yanai@eng.tamagawa.ac.jp

電子情報通信学会　技術研究報告　NC93-98 (1994-03)

Abstract

相関学習型シナプス荷重を持つ自己連想記憶モデルをとりあげ，離散型 2 段ダイナミクス・ニューロンを用いた場合の想起ダイナミクス (1 ステップ) を理論的に解析した．任意の応答関数についての理論式を導くと共に，区分的線形な応答関数について，それを特徴づけるパラメターの広い範囲で厳密記憶容量が同一で，そのパラメターの違いが記憶の引込み半径に影響するような条件が存在することを示した．

キーワード：神経回路モデル，連想記憶，非単調ニューロン，記憶容量，引込み半径

1　はじめに

連想記憶モデルは，かなりの単純化あるいは抽象化をしても神経システムとしての興味深い多様な振舞いを示すため，神経型システムの基本的なダイナミクスを数理的に解析するには恰好の材料である．その意味ではモデルの単純さにこそその存在価値があるということもできる．ただし，ここでいう「単純」さとは飽くまでも数理的な意味である．生物組織を用いてそれをそのまま実現しようとすると，線形素子を作るにはかなり複雑な構成を工夫しなければならないだろう．

数理工学の役割は，数学的に単純なモデルばかりでなく，かなり複雑に見えるモデルをも議論しておくことであろう．神経システムのどの振舞いが重要なのかが未解決の現在，現実のデータにとらわれない議論も大切である．

連想記憶をはじめとする神経回路モデル研究においては，ニューロンのモデルとして単純閾値素子やシグモイド関数が使われるのが当り前であった．しかし，1990 年に森田他 [1] によって指摘されたところによれば，内部状態 (神経生理学の言葉でいう膜電位) が小さい範囲ではニューロンの出力は内部状態とともに増大し，ある程度以上に大きくなると出力が減少するという非単調応答ニューロンを用いると，自己連想記憶の記憶容量が増大するとともに記憶の引込み半径 (領域) が大きく (誤り訂正能力が高く) なる．その研究に刺激されて試みられた研究はすべて，非単調ニューロンの有効性を確認するものであった．

無相関ランダム記憶パターンを相関学習型シナプスに記憶した場合について，自己連想型非単調ニューロンモデルの性質をまとめると次のようになる．ただし，ニューロン数を n とし，「記憶容量」とは安定に記憶可能な最大の記憶パターン数である．参考までに，単純閾値ニューロンあるいはシグモイド応答ニューロンを用いた場合の (相対) 記憶容量は約 $0.15n$，厳密記憶容量は $n/(2\log n)$ である．

- ダイナミクスが微分方程式で表現される連続モデルについては，コンピューター・シミュレーション [1, 2] や平衡状態の幾何学的近似解析 [3]，統計物理学の手法を用いた平衡状態解析 [5] によれば，記憶容量が $0.4n$ 程度である
- 離散型モデルの安定性の解析によれば，応答特性を最適化した 2 段ダイナミクス・ニューロン (非単調ニューロン) の厳密記憶容量は $n/\sqrt{2\log n}$ となる [7]
- 非単調ニューロンと相関学習型シナプス荷重 (直交射影行列) を用いると，単純閾値ニューロンと直交学習型シナプス荷重を用いるよりも記憶の引込み半径が大きい[1] [2]．

[1] 実は，単純閾値ニューロン + 直交学習型シナプスの場合でも，

これら非単調ニューロン回路モデルが興味深いのは，それまでは連想記憶モデルの性能改善の手段として取り組まれてきた手法 (“ニューロンの特性は単純なままにしておいて，シナプス荷重を工夫する”) とは対照的に，シナプス荷重は相関学習型という単純なままにしておいて，ニューロンの応答特性を変えてみようというところにある．しかも，直交学習型連想記憶が比較的雑音に弱い [8, 9] のに対して，非単調ニューロン + 相関学習型シナプスの場合には，単調ニューロン + 相関学習型シナプス同様かなり雑音にも強い [10]．連想ダイナミクスの解析によれば，2 段ダイナミクス・ニューロン + 相関学習型シナプスで応答関数を適当に選ぶと，直交学習型シナプス + 単純閾値ニューロンのダイナミクスと近似的に対応している [7]．直感的にいえば，直交学習型連想記憶モデルが雑音に弱いのは，元々は直交していないパターン間の干渉を消すような無理をした変換を行っていることによる．相関学習型では，そのような無理をしていないので，相対的な性能でいえばかなり劣っても，予期せぬ雑音には (その平均が 0 である限り) 比較的強い．この考え方でいえば，“中途半端” に直交射影を行っている非単調ニューロン連想モデルがそれら 2 つの場合の中間的な性質を持つ，つまり，性能がほどほどに高く，雑音にもほどほどに強いということが納得できよう．

今回は，離散型の 2 段ダイナミクス・ニューロンからなる相関学習型自己連想モデルの 1 ステップの想起過程に関する理論式をもとに，記憶の引込み半径について議論する．結論からいえば，ダイナミクスの根幹をなす非線形関数 f が非単調的であるときに連想モデルとしての性能が高くなる．その意味で，今後は 2 段ダイナミクス・ニューロンを単に非単調ニューロンということもある．

2　モデルの定式化

ニューロン数を n 個として，時刻 t における第 i ニューロンの状態 (± 1) を x_i とするとき，神経回路の状態を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)^T$ で表わす (T は転置の意)．第 j ニューロンから第 i ニューロンへのシナプス荷重 w_{ij} を i, j 成分とする行列を $\boldsymbol{W}$ とするとき，続く時刻 $t+1$ における神経回路の状態 $\boldsymbol{x}'$ が次のように表わせるとする．

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{W} f(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{x}' = sgn(\tilde{\boldsymbol{u}}) \end{cases} \tag{1}$$

f はこの 2 段ダイナミクスを特徴づける任意の非線形関数であり，sgn は閾値関数

$$sgn(u) = \begin{cases} -1, & u \le 0 \\ 1, & u > 0 \end{cases} \tag{2}$$

で，それらは引数がベクトルの場合には成分毎に作用する．　記憶パターンは各成分がランダムに ± 1 をとる n 次元の無相関ランダムベクトル $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_\mu, \ldots, \boldsymbol{\xi}_m$ である．その記憶パターンから次の相関行列を作り，シナプス荷重とする．

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{m} \boldsymbol{\xi}_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^T - \frac{m}{n} \boldsymbol{I} \tag{3}$$

$\boldsymbol{I}$ は単位行列で，$-(m/n)\boldsymbol{I}$ はシナプス荷重行列の対角成分を 0 にするための項である．成分毎に書けば

$$w_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{m} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \quad (i \neq j), \qquad w_{ii} = 0 \tag{4}$$

である．次に，連想のダイナミクスを表現する尺度として類似度，距離，負荷率を定義しよう．類似度 l_t^μ は，時刻 t における回路の状態 $\boldsymbol{x}$ と第 μ 記憶パターン $\boldsymbol{\xi}_\mu$ の方向余弦として

$$l_t^\mu = \frac{\boldsymbol{\xi}_\mu \cdot \boldsymbol{x}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^\mu x_i \tag{5}$$

で定義される．類似度は -1 と 1 の間の値を取り，対応する (正規化ハミング) 距離 d_t^μ とは $l_t^\mu = 1 - 2d_t^\mu$ の関係がある．なお，着目している記憶パターンや時刻が明らかな場合には添字 μ や t を省略する．ニューロン数 n が十分に大きければ，連想のダイナミクスを支配する唯一のパラメターは

$$r = \frac{m}{n} \tag{6}$$

で定義される負荷率である．記憶の安定性や引き込み領域のシミュレーションには数百程度以上の n で統計的理論がかなりあてはまる．

3　主な結果

以上のように定義された離散型 2 段ダイナミクス・ニューロン回路による記憶の引込み領域に関する主な結

ニューロンの自己結合 (シナプス荷重行列の対角成分) を 0 にすれば非単調ニューロン + 相関学習とほとんど同じ引込み半径が実現できる [6] ので，非単調ニューロンが絶対的に優位というわけではない．しかしそれでもなお興味深い側面は多い．

果をまとめておこう．(1) 式における関数 f が線形，つまり $f(u) = au$ の場合は，厳密記憶容量 m_c は $n \to \infty$ の極限で次のように表現される．

$$m_c = \begin{cases} \left(\frac{1+a}{1+2a}\right)^2 \frac{n}{2\log n} & (a \neq -1/2) \\ \frac{n}{\sqrt{2\log n}} & (a = -1/2) \end{cases} \quad (7)$$

$a = 0$ とすれば単純閾値ニューロンについての結果 $n/(2\log n)$ を得る．$a = -1/2$ の場合はその他の場合とに比べてよりオーダーの大きな厳密記憶容量が得られる．また，関数が

$$f(u) = au - (1+2a)sgn(u) \quad (8)$$

のような区分的線形関数で表わせる場合は，すべての $a < 0$ に対して一様に

$$m_c = \frac{n}{\sqrt{2\log n}} \quad (9)$$

となる．(8) 式は $a = -1/2$ で線形関数となり，線形関数の範囲で記憶容量が極端に大きくなる場合 ((7) 式の下段) に一致する．

では，(8) 式の応答関数を用いた場合について記憶パターンの引き込み半径を示しておこう．記憶しているパターン数 m が $m = \rho m_c (0 < \rho \leq 1)$ であるとする (つまり，記憶容量の $100\rho\%$だけのパターンを蓄積しているとする)．このとき，最も近い記憶パターンから距離 $d(0 \leq d < 1/2)$ だけ離れた状態から始めて，(1) 式の 1 ステップのダイナミクスで回路の状態がその最も近い記憶パターンと厳密に一致する条件 (つまり引込み半径) は

$$d < \begin{cases} \frac{(1-\rho^2)a^2}{4\rho(1+a)^2} \frac{1}{\sqrt{2\log n}} & (a \neq -1) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\rho}} \left(\frac{1}{2\log n}\right)^{\frac{1}{4}} & (a = -1) \end{cases} \quad (10)$$

である．記憶容量はパラメター a の広い範囲で一様であったが，引き込み半径は $a = -1$ で最大となる．ただし，この条件は記憶が厳密であるような領域 $m \sim n/\sqrt{\log n} \ll n$ でのみ成り立つので，そのままでは $m \sim n$ にはあてはまらない．

とはいっても，(10) 式は，単純閾値ニューロンの記憶容量に比べればオーダーの大きな領域での条件であるので，非単調ニューロンと単純閾値ニューロンの違いを述べておくことにする．よく知られているように [11]，単純閾値ニューロンを用いた自己連想記憶モデルの厳密記憶容量は

$$m_c^{ST} = \frac{n}{2\log n} \quad (11)$$

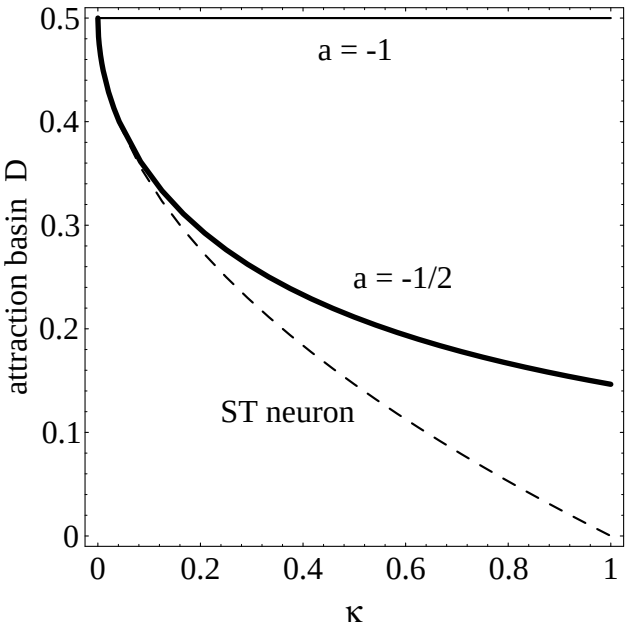

図 1: 引込み半径と負荷率の関係．

であり，(10) 式と同様の引き込み条件は，記憶パターン数が $m = \kappa m_c^{ST} (0 < \kappa \leq 1)$ であるとき

$$d < \frac{1-\sqrt{\kappa}}{2} \quad (12)$$

である．これが (8) 式で定義される関数 f を用いた 2 段ダイナミクス・ニューロンの場合は，一般にこれより非常に大きな引き込み領域を持ち，特に $a = -1/2$ の場合は，$\kappa \leq 1$ のとき $d < 1/2$ であれば (記憶パターンとの重なりが僅かでもあれば) 1 ステップで記憶に引き込まれる．この関係を描いたのが図 1である．

4　連想ダイナミクスの理論

自己連想モデルは神経回路の基本的なモデルとして古くから取り扱われてきたが，実は，ここ 10 年ほどの理論的進展により，同じ結合形態を持ったモデルの中ではダイナミクス (平衡状態を含む) の解析が最も困難であることが分かってきた (例えば [12])[2]．そうすると，自己連想モデルの理論的解析には 3 つの道がある：

1. 近似を用いた平衡状態解析から記憶容量など特徴的な量を計算する [4, 5]
2. 少ステップ (極端には 1 ステップ) のダイナミクスを比較的詳しく解析する

[2] 例えば系列連想型モデルの方がよほど解析は容易で，コンピューター・シミュレーション解析とよく一致する理論式が比較的容易に導ける [13, 14]．

3. 2. の結果を多ステップについて正しいとみなして大域的ダイナミクスを議論する [15]

ここでは，2. の方法を採る．この方法では，記憶パターンの厳密記憶容量や，記憶パターン近傍の引き込み領域を解析することができる．そこで得られた結果が必ずしも多ステップ・ダイナミクスにあてはまるとは限らないが，少なくともその性質についての示唆を得ることができる．

ここでは理論的計算の流れのみを示す．(1) 式を成分で書けば次のようになる．

$$\left\{\begin{array}{l} u_j = \sum_{k=1}^{n} w_{jk} x_k \\ \tilde{u}_i = u_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ij} f(u_j) \\ x'_i = sgn(\tilde{u}_i) \end{array}\right. \tag{13}$$

はじめに内部状態$\tilde{u}_i$を記憶パターン想起のための信号成分，履歴に依存したバイアス成分，及び雑音成分に分て，

$$\begin{aligned} x'_i &= sgn(\xi^1_i L + B x_i + \sigma\tilde{\epsilon}_i) \\ &= \xi^1_i sgn(L + B\xi^1_i x_i + \sigma\epsilon_i) \end{aligned} \tag{14}$$

と表わせたとする．ここに，$\epsilon_i = \xi^1_i\tilde{\epsilon}_i$は平均が 0 ，分散が 1 の正規乱数である (例えば [15]) . これを用いれば，1 ステップ後の回路の状態$\boldsymbol{x}'$と初期状態$\boldsymbol{x}$に最も近い記憶パターン (これを$\boldsymbol{\xi}_1$としよう) の距離 d'は

$$\begin{aligned} d' &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} |\xi^1_i - x'_i| \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} (1 - \xi^1_i x'_i) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi^1_i x'_i\right) \end{aligned} \tag{15}$$

となる．(15) 式の最後の和は $\boldsymbol{x}'$と$\boldsymbol{\xi}_1$ の間の類似度 l'であり，

$$\begin{aligned} l' &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi^1_i x'_i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} sgn(L + B\xi^1_i x_i + \sigma\epsilon_i) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i\in I_+} sgn(L + B + \sigma\epsilon_i) \\ &\quad + \frac{1}{n}\sum_{i\in I_-} sgn(L - B + \sigma\epsilon_i) \end{aligned} \tag{16}$$

のように分解できる．ただし，I_+, I_-はそれぞれ初期状態 x_iについて$\xi^1_i x_i = 1$ であるニューロン，$\xi^1_i x_i = -1$ であるニューロンの集合を表わし，それぞれの要素数は $n(1-d)$, nd である (d は初期状態 $\boldsymbol{x}$ と$\boldsymbol{\xi}_1$の距離) . したがって，l'の期待値は

$$E[l'] = 1 - 2\left\{(1-d)\phi\left(\frac{L+B}{\sigma}\right) + d\phi\left(\frac{L-B}{\sigma}\right)\right\} \tag{17}$$

ひいては，

$$E[d'] = (1-d)\phi\left(\frac{L+B}{\sigma}\right) + d\phi\left(\frac{L-B}{\sigma}\right) \tag{18}$$

であることになる．ただし，$\phi(u)$ は

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{19}$$

で定義される誤差積分である．ニューロン数 n が十分に大きければ，大数の法則によってこの期待値 $E[d']$ が実際の d'に等しいことが保証される．

さて，問題はこれら L, B, σを計算することである．ここでは一般性を失うことなく$\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1, \ldots, 1)^T$とおけば，(13) 式の u_iは初期状態の類似度 lを用いて

$$u_i = l + N_i \tag{20}$$

と表わせる (例えば [15, 16] を参照) . ここに，N_iは標準正規乱数ϵ_iを用いて $N_i = \sqrt{m/n}\,\epsilon_i$とかける．内部状態$\tilde{u}_i$の第 2 項は

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij} f(u_j) = Signal + Bias\ x_i + M_i \tag{21}$$

と置けることが示せるので，さきに用いた L, B, σは

$$L = l + Signal \tag{22}$$

$$B = Bias \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= V[N_i + M_i] \\ &= V[N_i] + V[M_i] + 2cov(N_i, M_i) \\ &= E[N_i^2] + V[M_i] + 2E[N_i M_i] \end{aligned} \tag{24}$$

と表わせる．ここでは計算の結果のみを示す．

$$\begin{aligned} \sigma_0 &\equiv \sqrt{V[N_i]} = r \\ F_p(l) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(l + \sigma_0 t)^p \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \end{aligned}$$

と置けば，

$$\begin{aligned} Signal &= F_1(l) \\ Bias &= r\dot{F}_1(l) \\ E[N_i^2] &= \sigma_0^2 \\ V[M_i] &= rF_2(l) + 2rlF_1(l)\dot{F}_1(l) + \sigma_0^2\dot{F}_1(l)^2 \\ cov(N_i, M_i) &= rlF_1(l) + r\dot{F}_1(l) \end{aligned}$$

となる．ただし，$\dot{}$ は微分を表わす．また，σ_0^2と rを区別して書いたのは，各項の由来の違いを明示するためである．実際，rは１ステップでも多ステップでもパラメターであるのに対し，σ_0は多ステップのダイナミクスにおいては時刻とともに変化する変数となる．

以上を１ステップのダイナミクスについてまとめれば次の定理を得る．

定理 **1**　２段ダイナミクス・ニューロンからなる自己連想記憶モデルにおいて，初期状態での距離 d と変換後の距離 d'の関係は

$$d' = (1-d)\phi\left(\frac{L+B}{\sigma}\right) + d\phi\left(\frac{L-B}{\sigma}\right)$$

ただし，

$$\begin{aligned} L &= l + F_1(l) \\ B &= r\dot{F}_1(l) \\ \sigma^2 &= r\Big[1 + F_2(l) + 2lF_1(l)\dot{F}_1(l) \\ &\qquad + \dot{F}_1(l)^2 + 2\Big(lF_1(l) + \dot{F}_1(l)\Big)\Big] \end{aligned}$$

で表わされる．

関数 fが線形あるいは区分的線形の場合には定理の式が具体的に求まり，厳密記憶容量や記憶の引き込み半径を見積もることができる．

5　記憶容量と引込み半径

5.1　$f(u) = au$ の場合

定理の式を具体的に計算することにより，記憶容量つまり記憶パターンの安定性にするパラメター（傾き a）は，負荷率が rのとき

$$a = -\frac{1-r}{2-r} \tag{25}$$

であることが容易に示せる．さまざまな a に対する厳密記憶容量は (7) 式に示した通りである．

5.2　$f(u)$ が区分的線形の場合

区分的線形にもさまざまあるが，ここでは

$$f(u) = \begin{cases} au - c, & u < 0 \\ 0, & u = 0 \\ au + c, & u > 0 \end{cases} \tag{26}$$

についての結果を示そう．負荷率の一般の値についてはそう単純ではないが，rが小さい場合には，記憶容量を最大にする傾き a と切片 c の関係は

$$1 + c + a\frac{2-r}{1-r} = 0, \quad a < 0 \tag{27}$$

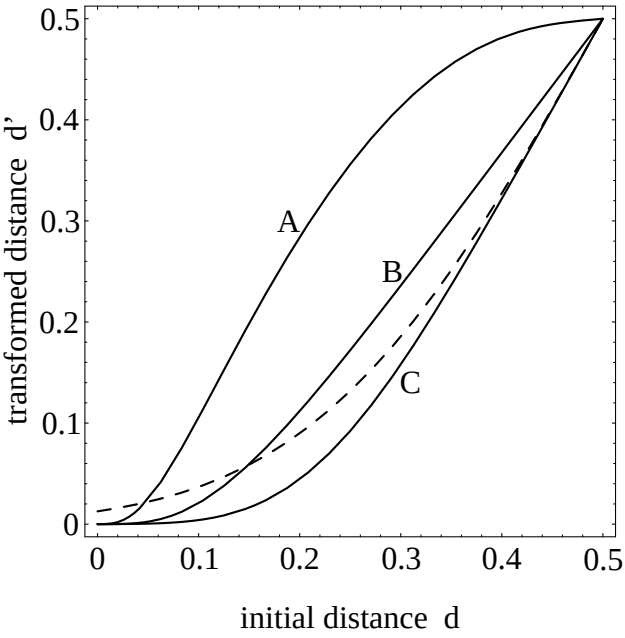

図 2: 応答関数 fの形によって誤り訂正能力が異なる様子（$r = 0.2$）．最適条件式を満たすもののうち A: $a = -0.375$, B: $a = -0.5$, C: $a = -1$．破線は単純閾値ニューロンの場合．

である．さらに $r \ll 1$ としてこの条件を近似すれば

$$1 + c + 2a = 0, \quad a < 0 \tag{28}$$

となる．この条件を満たす関数についての記憶容量は (7) 式の $a = -1/2$ の場合に等しい．実際 (27) 式の条件は $c = 0$ とすれば線形関数となり，それはまさに前項で述べた最適条件（25）である．したがって，負荷率が十分小さな範囲では，記憶パターン安定性の最適条件は (28) 式にまとめられる．

では，(28) 式の条件を満たす限り連想記憶の性質に違いはないのだろうか？実は，記憶パターンそのものの安定性は同一でも，それからずれたパターンからの引き込み領域が異なるのである．この様子を概観するために，$r \ll 1$ の近似をせずに定理の式をそのまま用いて，最適条件 (28) 式を満たす場合の距離の変換を描いたのが図 2である．応答関数形が異なる場合，記憶パターン自身の安定性（$d = 0$ に対する d'）は一様で，誤り訂正能力（引き込み領域）が変化することが見て取れる．因みに，破線の単純閾値ニューロンでは $d = 0$ に対して $d' \sim 10^{-2}$であるのに対し，非単調ニューロンでは $d' < 10^{-5}$である．

さて，記憶パターン数 m が単純閾値ニューロンの記憶容量のオーダー（$\sim n/\log n$）の場合の引き込み半径

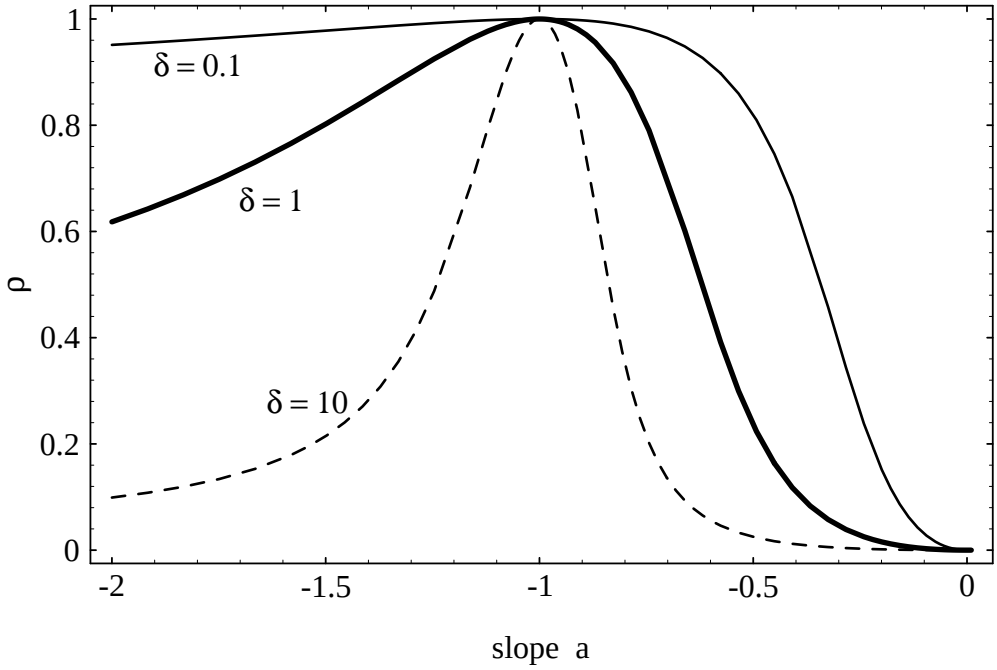

図 3: 引き込み領域が a の値によって異なる様子．

については図 1に示したとおりであり，$m \sim n/\sqrt{\log n}$ については (10) 式に示したとおりである．ここでは，最適条件を満たす範囲での a の値が引き込半径にどう影響するかをみるために図 3を示しておこう．図は，距離が$\delta/\sqrt{2\log n}(\delta \geq 0)$ だけずれた初期状態から始めて，１ステップのダイナミクスの後に最も近い記憶パターンに引込まれ得る負荷率$\rho/\sqrt{2\log n}(0 < \rho \leq 1)$ の上限を表現している(例えば，$\delta = 1$ の場合，傾きが $a = 0.5$ であると，１ステップでの引込みを保証するためには記憶パターンは記憶容量の約 20%以内でなければならない)．他の値に比べて，$a = -1$ の時に引込み半径が非常に大きいことが分かる．なお，ρとδおよび a の関係は

$$\rho = \sqrt{X^2+1} - X, \quad X = \frac{2\delta(1+a)^2}{a^2} \qquad (29)$$

で与えられる．

6　まとめ

離散型２段ダイナミクス・ニューロンを用いた相関学習型自己連想記憶モデルについて，１ステップの連想ダイナミクスを理論的に解析し，連想性能を高くするためには応答関数 fが非単調になることを導いた．そして，応答関数を決めるパラメターの広い範囲で一様な厳密記憶容量が達成され，パラメターの違いは引込み半径の大きさに影響することを示した．

なお，負荷率 $r < 0.3$ 程度でのコンピューター・シミュレーションにより，多ステップのダイナミクスにおいても，区分的線形関数の a が$-1/2$ であるよりも負 (> -1) である方が引込み半径とともに想起速度が大きくなることを確かめている．

参考文献

[1] 森田，吉澤，中野 (1990):自己相関連想記憶の想起過程とその改良，電子情報通信学会論文誌，J73-DII, 232–242

[2] M. Morita (1993): Associative memory with nonmonotone dynamics, *Neural Networks*, 6, 115–126

[3] S. Yoshizawa, M. Morita & S. Amari (1993): Capacityof associative memory using a nonmonotonic neuron model, *Neural Networks*, 6, 167–176

[4] D. J. Amit, H. Gutfreund,& H. Sompolinsky (1985): Storing infinite number of patterns in a spin-glass model of neural networks, *Pys. Rev. Lett.*, 55,1530–1533

[5] M. Shiino & T. Fukai (1993): Self-consistentsignal-to- noise analysis of the statistical behavior of analog neural networks and enhancement of the storage capacity, *Physical Review E*, 48, 867– 897

[6] I. Kanter & H. Sompolinsky (1987): Associativerecall of memory without errors, *Physical Review A.*, 35, 380–392

[7] H.-F. Yanai & S. Amari (1993): A theory on a neural net with non-monotone neurons, *Proc. 1993 IEEE Conf. Neural Networks*, 1385–1390

[8] 甘利俊一 (1978) :「神経回路網の数理」, 産業図書

[9] 松岡清利編著 (1992) :「ニューロコンピューティング」, 朝倉書店

[10] 三村, 岡田, 倉田 (1993) : 非単調アナログ連想記憶モデルの耐ノイズ性, 電子情報通信学会技術研究報告, NC92-150

[11] R. J. McEliece, E. C.Posner,E. R.Rodemich, & S. S. Venkatesh (1987): The capacity of the Hopfield associative memory, *IEEE Trans. Information Theory*, IT-33,461–482

[12] E. Gardner, B. Derrida, & P. Mottishaw (1987): Zero temperature parallel dynamics for infinite range spin glasses and neural networks, *J. Physique*, 48,741–755

[13] S. Amari (1988): Associative memory and its statistical- neurodynamical analysis, in *Neural and Synergetic Computers*, H. Haken, ed.,Springer Series in Synergetics, No. 42, Springer-Verlag, New York

[14] S. Amari & H.-F. Yanai (1993): Statistical neurodynamicsof various types of associative nets, in *Associative Neural Memories —Theory and Implementation*, M. H. Hassoun, ed., Oxford Univ. Press, New York

[15] S. Amari & K. Maginu (1988): Statistical neurodynamics of associative memory, *Neural Networks*, 2,63–73

[16] H.-F. Yanai, Y. Sawada, & S.Yoshizawa (1991): Dynamics of an auto-associative neural network model with arbitrary connectivity and noise in the threshold, *Network*, 2, 295–314