ニューロン及びシナプス・ダイナミクスの等価性と興味深い性質

Equivalence of neuronal and sypantic dynamics, and interesting differences

矢内　浩文 (PY)　玉川大学　工学部
Hiro-F. Yanai, Faculty of Engineering, Tamagawa University
E-mail: yanai@eng.tamagawa.ac.jp

日本神経回路学会　1995 年 10 月　[P1-24]

Abstract

There are two phases in the dynamics of neural nets: neuronal and synaptic. Through the extension of linear version of 2-stage neuron, I show that neuronal dynamics can approximate the orthogonal learning (synaptic dynamics) to any desired precision. Although the two phases are equivalent there also are interesting differences.

1　ニューロン及びシナプス・ダイナミクス

神経回路における情報処理は，ニューロン回路の状態を動的に変更する事を通して行なわれる．その動的変更には 2 つの側面がある：1 つは，ニューロンが内部状態に応じて出力を出す事，もう 1 つは，シナプスの荷重を変更する事である．それら 2 つの過程をここでは単に「ニューロン・ダイナミクス」,「シナプス・ダイナミクス」と呼ぶ事にする．

ニューロン・ダイナミクスのモデルは次のように書ける：

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t = W\boldsymbol{x}_t, \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_t = F(\boldsymbol{u}_t, W), \\ \boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{sgn}(\tilde{\boldsymbol{u}}_t). \end{cases} \tag{1}$$

ここに，$\boldsymbol{x}_t$ は離散時刻 t におけるニューロンの (出力) 状態ベクトルで成分は ± 1．W はシナプス荷重行列，$\boldsymbol{u}_t$ はニューロンへの入力ベクトル，$\tilde{\boldsymbol{u}}_t$ はニューロンの内部状態ベクトルである．また，$\mathrm{sgn}(u) = 1(u > 0), -1(u \leq 0)$ である．この中で最も単純なモデルは，$F(u, W) = u$ 即ち $\tilde{\boldsymbol{u}}_t = \boldsymbol{u}_t$ と選んだもの (これを閾値ニューロン回路と呼ぶ) である．

シナプス・ダイナミクスは，離散時間の形式で書けば，

$$W(s+1) = (1-\gamma)W(s) + \beta F_L \tag{2}$$

となる (γ，β は定数)．ここに，F_L はシナプス荷重変更信号 (学習信号) であり，シナプス・ダイナミクスの定義に依存する．自己連想記憶モデルの場合，相関行列型シナプス荷重 W_c が広く用いられているが，それは，記憶させたい n 次元ベクトル $\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \ldots, \boldsymbol{\xi}^m$ (成分は ± 1) から構成される $n \times m$ 行列 $S = (\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \ldots, \boldsymbol{\xi}^m)$ を用いて

$$W_c = \frac{1}{n} S S^T \tag{3}$$

と定義される (ここに，T は行列の転置を意味する)．この行列は，(2) 式で $F_L = \boldsymbol{\xi}^\mu (\boldsymbol{\xi}^\mu)^T$ と置く事で逐次的に求める事ができる．その他の可能性としては，擬逆行列型，パーセプトロン型がある．擬逆行列型では，$F_L = [\boldsymbol{\xi}^\mu - W(s)\boldsymbol{\xi}^\mu](\boldsymbol{\xi}^\mu)^T$ と置く事により，$W(s)$ は直交射影行列 $P = SS^+$ に収束する．ここに，S^+ は S の擬逆行列で S を用いて，$S^+ = (S^T S)^{-1} S^T$ と表わせる．この行列を用いれば，互いに一次独立なベクトルを (1) 式に閾値ニューロン回路に記憶させる (回路の平衡点にする) 事ができる．パーセプトロン型は $F_L = [\boldsymbol{\xi}^\mu - \mathrm{sgn}(W(s)\boldsymbol{\xi}^\mu)](\boldsymbol{\xi}^\mu)^T$ と置いた場合で，これによれば互いに線形分離可能なベクトルを閾値ニューロン回路に記憶させる事ができる．

連想記憶の記憶容量について言えば，パーセプトロン型の性能が常に最も高い．擬逆行列型と相関行列型の関係は記憶させたいベクトルの統計的性質に依存する．つまり，記憶ベクトルの成分の ± 1 に偏りがないならば擬逆行列型が勝るが，偏りが極端になると相関行列型が勝る．一方，記憶ベクトルの追加や削除については，相関行列型が最も単純である．相関行列型の場合本質的に追加 / 削除の対象となる記憶ベクトルのみを操作すればよいが，直交射影行列型やパーセプトロン型では記憶ベクトルを追加 / 削除する場合，記憶ベクトルをすべて再学習しなければならない．

2　2 段ダイナミクス・ニューロンと直交射影行列型シナプス

連想記憶の性能改善法として注目されている非単調ニューロン [3] を離散ダイナミクスの意味で拡張したのが 2 段ダイナミクス・ニューロン，(1) 式，である．相関行列型で対角成分を 0 にした場合 (この行列を W_c^0

Keywords: ダイナミクス，シナプス可塑性，相関行列，直交射影行列

と書こう) には，記憶ベクトル数とニューロン数の比率：負荷率 $r = m/n$ が大きくない場合，$F(u,W) = u + W_c^0 f(u)$ として $f(u) = -au - (1-2a)\mathrm{sgn}(u), a > 0$ とおいた場合に連想記憶の性能が高くなる事が知られている [5]．それら性能を高くする関数のうち，最も単純なのは，$a = 1/2$ つまり線形関数の場合である．この場合について (1) 式を具体的に書けば，

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{sgn}\left[\left(I - \frac{1}{2}W_c^0\right) W_c^0 \boldsymbol{x}_t\right] \tag{4}$$

(I は単位行列) となり，線形の場合の性能改善が，相関行列を用いて直交射影行列を近似している事に起因する事が分かる．これについて説明しよう．擬逆行列 S^+ の von Neumann 展開は

$$S^+ = \frac{\alpha}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(I - \frac{\alpha}{n}S^T S\right)^k S^T, \tag{5}$$

である [4]．従って，直交射影行列は

$$\begin{aligned} P &= SS^+ \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(I - \alpha W_c)^k \alpha W_c. \end{aligned} \tag{6}$$

と表わせる．行列 P の展開を最初の 2 項で止めれば，

$$\sum_{k=0}^{1}(I - \alpha W_c)^k \alpha W_c = 2\alpha\left(I - \frac{\alpha}{2}W_c\right) W_c. \tag{7}$$

となり，(4) 式で用いられている形の行列が現われる．

線形の 2 段ダイナミクス・ニューロンを拡張したのが次に挙げる τ 次の線形 2 段ダイナミクス・ニューロンである．

$$\text{第 1 段階} \quad : \quad \boldsymbol{u}_t = W_c \boldsymbol{x}_t, \tag{8}$$

$$\text{第 2 段階} \quad : \quad \tilde{\boldsymbol{u}}_t^{(\tau)} = \sum_{k=0}^{\tau}(I - \alpha W_c)^k \alpha \boldsymbol{u}_t, \tag{9}$$

$$\text{出力段階} \quad : \quad \boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{sgn}(\tilde{\boldsymbol{u}}_t^{(\tau)}), \tag{10}$$

第 2 段階の式は，より神経回路モデルらしく

$$\begin{aligned} &\tilde{\boldsymbol{u}}_t^{(k+1)} = \tilde{\boldsymbol{u}}_t^{(k)} + (I - \alpha W_c)(\tilde{\boldsymbol{u}}_t^{(k)} - \tilde{\boldsymbol{u}}_t^{(k-1)}) \\ &\quad \text{with} \\ &\tilde{\boldsymbol{u}}_t^{(0)} = \alpha W_c \boldsymbol{x}_t \quad \text{and} \quad \tilde{\boldsymbol{u}}_t^{(-1)} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

或いは

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_t^{(k+1)} = (I - \alpha W_c)\boldsymbol{v}_t^{(k)} \\ &\tilde{\boldsymbol{u}}_t^{(k+1)} = \tilde{\boldsymbol{u}}_t^{(k)} + \boldsymbol{v}_t^{(k+1)} \\ &\quad \text{with} \\ &\boldsymbol{v}_t^{(0)} = \alpha \boldsymbol{u}_t \quad \text{and} \quad \tilde{\boldsymbol{u}}_t^{(0)} = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

と書く事もできる．

$\tau \to \infty$ で，線形 2 段ダイナミクス・ニューロン回路は「閾値ニューロン回路に直交射影行列」を用いたモデルと一致する．従って，$\tau \to \infty$ とした場合の線形 2 段ダイナミクス・ニューロン回路の性質は，擬逆行列型モデルの解析結果 [1, 2] をそのまま適用できる．

3 ニューロン及びシナプス・ダイナミクスの相違と線形 2 段ダイナミクス・ニューロン回路の興味深い性質

注目すべき性質をまとめておく．

- 線形 2 段ダイナミクス・ニューロン回路に用いられているシナプス荷重行列は相関行列なので，記憶の追加 / 削除が容易である．
- 線形 2 段ダイナミクス・ニューロン回路では，ニューロンの応答特性が複雑になるが，神経回路全体としてはむしろ閾値ニューロンに擬逆行列型シナプスを用いた場合より複雑ではない．なぜなら，一般にニューロン数が n の場合，シナプス数は $O(n)$ だからである．
- 擬逆行列型シナプスは相関行列型シナプスに比して学習時の雑音による性能の低下が激しいので，回路の動作環境に応じて適切な τ があり，τ は必ずしも大きい程良いという訳ではない．
- 相関行列の 0 対角成分版 W_c^0 を用いて τ を十分大きく取れば「一致検出回路」となる．即ち，記憶ベクトルが入力されると回路はそのままの状態を保持するが，少しでも記憶ベクトルからずれたものが入力されると回路はすべての記憶ベクトルと無相関な状態へ収束する．

参考文献

[1] Kanter, I. and Sompolinsky, H. (1987): Associative recall of memory without errors, *Phys. Rev. A*, **35**, 380–392

[2] Kohonen, T. (1989): Self-Organization and Associative Memory, Springer-Verlag

[3] Morita, M. (1993): Associative memory with nonmonotone dynamics, *Neural Networks*, **6**, 115–126

[4] Rao, C. R. and Mitra, S. K. (1971): Generalized Inverse of Matrices and its Applications, John Wiley & Sons

[5] 矢内浩文 (1994)：離散型非単調ニューロンからなる連想記憶モデルの引込半径, 電子情報通信学会技術研究報告, NC93-98