神経回路モデルのシミュレーション

Hiro-F. YANAI

February 15, 1996

1　ひとの情報処理の数理

現在用いられているほとんどの情報処理装置は直列的に局在情報を処理する方式（直列・局在処理）であるが，ひと（脳）の情報処理には並列・分散処理が本質的に関わっていると考えられている．したがって，ひとの情報処理の解析はそれ自体が興味深いものであると同時に，並列・分散処理という新しい情報処理方式の解明のためにも重要な課題である．

ここでは，神経回路モデルに関するコンピューター・シミュレーション解析を行ない，ひとの情報処理方式を明らかにするための数理的な方法に触れて，並列・分散処理の特質を考察してみよう．

2　神経回路モデル入門

n 個の素子が相互に結合したシステムを考え，その素子を **ニューロン**（神経細胞），結合を **シナプス** とみれば，神経回路モデルが構成できる．ただし，何の条件もなければ神経回路モデルと呼ぶ事はできない．その条件とは，

1. 各素子は他の素子の状態とそれへの結合荷重のみに基づいて状態を変化させ，その振舞いが現実のニューロンの振舞いと対応づけできる．
2. 結合が学習機能を持ち，その学習は **局所的** に行なわれる（局所的とは，全体の状況からトップダウン的に動作するのではなく，結合が自主的に値を決める事である）．

10 個の素子からなる神経回路モデルの概念図を描くと図 1 (a) のようになる．○が素子を，—が結合を表わしている．

各素子に図 1 (b) のように番号を付けて区別し，例えば 1 と 3 と 4 と 9 が活動していたら「ひと」を表わし，2 と 8 と 10 が活動していたら「ホウレン草」を表わすというように，素子の活動パターンと記憶（概念）を対応させるのである．

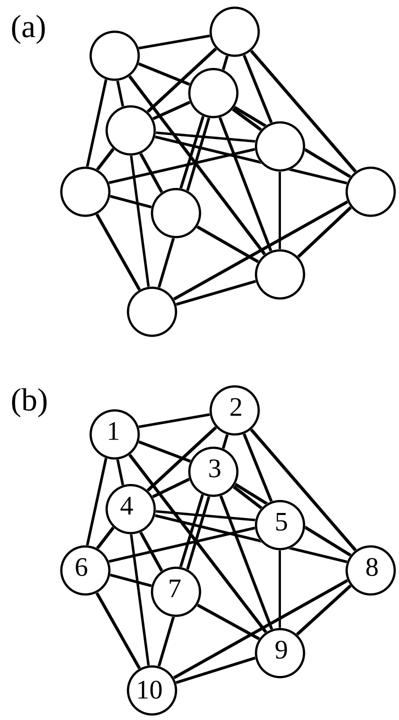

図 1: 神経回路モデルの概念図

とはいっても，図 1 のままでは数学的に議論がしにくくなるので，各素子の状態を x_i としたときの神経回路モデルの状態をベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10})$ で表わす事にする．そして，素子が **活動** している事を 1 で，**休止** している事を -1 で表わす（休止を 0 で表わす事も多い）．そうすれば，上の例で「ひと」は $(+1, -1, +1, +1, -1, -1, -1, -1, +1, -1)$,「ホウレン草」は $(-1, +1, -1, -1, -1, -1, -1, +1, -1, +1)$ と表わされる．結合についても，素子 2 から素子 7 への結合の強さを w_{72} というように，第 j 素子から第 i 素子への結合荷重を w_{ij} とし，すべての i, j の組み合せについて結

合荷重を書くと次のように行列として表わされる．

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \cdots \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

素子の動作 は次のように定められる．一般化するために，素子の数を n としよう．各素子の状態を第素子への結合の強さで重み付けして足し合わせた量（第 i 素子への入力）を $u_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ と書けば，

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j \tag{1}$$

となる．この u_i が予め定められている値より大きければ第 i 素子は活動し，その値より小さければ休止となる．この境目の値を **閾値**（「いきち」，あるいは「しきいち」）といい，h_i と書く．以上のことを数学的に表現すれば，

$$\begin{aligned} x_i &\leftarrow f\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - h_i\right) \\ f(v) &= \begin{cases} -1 & (v < 0) \\ 1 & (v \geq 0) \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

となる．関数 f の形は図 2，素子の機能を模式的に描くと図 3 のようになる．そして，素子が相互に結合した神経回路モデルは図 4 のように表現できる．

さて，ここで **素子が状態を更新する方法** について述べておこう．神経回路モデルのような並列システムにおいて注意しなければならないのは，複数の素子の状態更新が同期的に行なわれるかどうかである．素子の出す答えをどのような順序で他の素子に伝えればよいのか，それとも順序は関係ないのか，である．同期機構の有無でシステムの動作が左右されるかどうかは重要な問題である．神経回路モデルの場合はそれは以下のように区別される．

1. **同期的更新**：すべての素子が同時に状態を更新する．時刻を離散的に $t = 0, 1, 2, \ldots$ として，時刻 t での各素子の状態を $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t)$ とする．このとき，次の時刻 $t+1$ での各素子の状態 $x_1(t+1), x_2(t+1), x_3(t+1), \ldots, x_n(t+1)$ を，(2) 式をもとに

$$x_i(t+1) = f\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j(t) - h_i\right) \tag{3}$$

   のように定める．

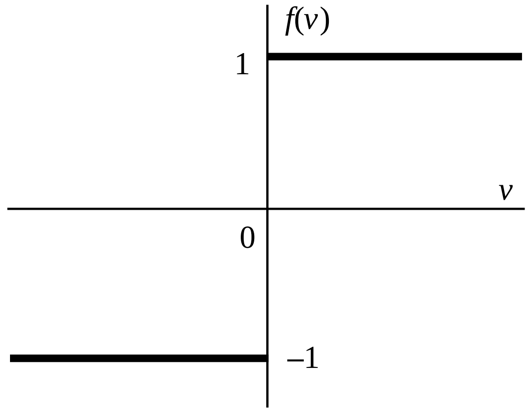

図 2: 素子の入出力特性

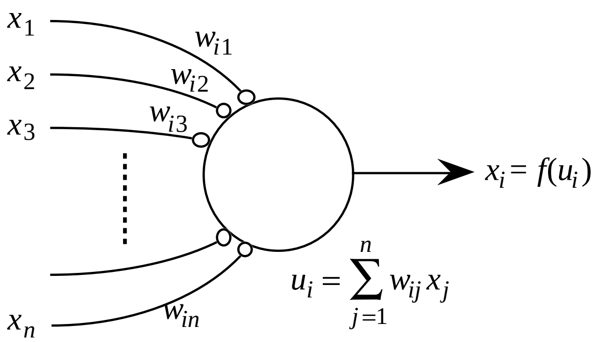

図 3: 素子機能の模式図

2. **非同期的更新**：各素子がばらばらのタイミングで状態を更新する．大雑把に言い換えれば，各素子は何らかの司令を待つ事なく，“気まぐれに” 状態を更新する．したがって，ある時点ではただひとつの素子のみが状態を更新するとみなす．この更新規則においては「時間」の考え方が同期的の場合とは全く違う．この規則での時間の測り方として，延べ n 個の素子が状態を更新したところで時刻が 1 つ進んだと見る方法がある．

2 の更新方法をたとえ話で説明してみよう．素子が平面にばらまかれている．素子 1 つ分だけが照らせるようなスポット・ライトが 1 基あって，光のスポットが素子群の上をあちこちに動いている．素子は，光が当たった瞬間に自分の状態を (2) 式に従って更新するのである．

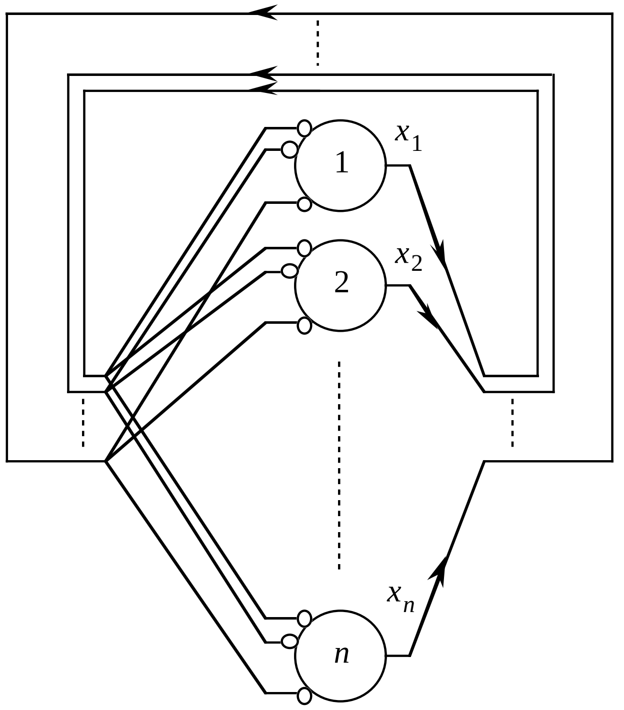

図 4: 相互に結合された素子の回路

3　神経回路モデルの学習

神経回路モデルの学習は結合荷重 w_{ij} の変化として行なわれる．記憶させたいパターンをベクトルの形に書いたものを

$$\begin{gathered}\boldsymbol{s}^1 = (s_1^1, s_2^1, s_3^1, \ldots, s_n^1)\\ \boldsymbol{s}^2 = (s_1^2, s_2^2, s_3^2, \ldots, s_n^2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{s}^\alpha = (s_1^\alpha, s_2^\alpha, s_3^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{s}^m = (s_1^m, s_2^m, s_3^m, \ldots, s_n^m)\end{gathered}$$

とする．ここに，s_i^α は第 α 番目の記憶パターンの第 i 成分を表わす．記憶パターンとしては，n 個の素子を格子型に配置したとすれば文字や図形を用いる事もできる．例えば，64 個の素子を上から順に 8×8 に並べて，活動状態を●で，休止状態を○で表わせば，図 5 のようにひらがなの “の” を表わす事もできる．

学習は，次のように行なわれる．記憶すべきパターンが次々と神経回路に示され，その度に各素子は記憶パターンと同じ状態（1 または –1）に固定される．例えば，第 3 記憶パターンが示されている間は，各素子の状態 $x_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ は示された記憶パターンに固定

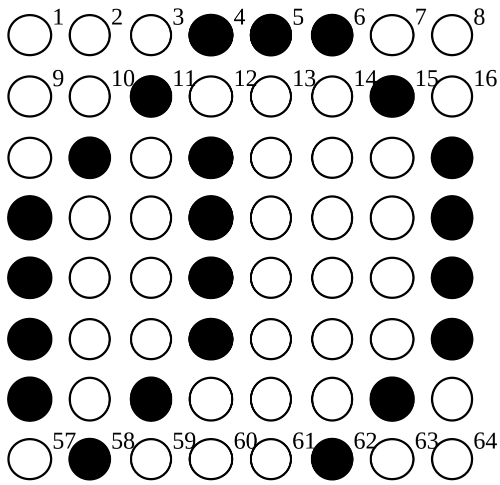

図 5: 記憶パターンの例

され，

$$x_1 = s_1^3, x_2 = s_2^3, x_3 = s_3^3, \ldots, x_n = s_n^3,$$

となる．そして，パターン呈示の度に結合荷重 $w_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ を

$$\Delta w_{ij} = \varepsilon x_i x_j \tag{4}$$

だけ変化させる（Δ は変化分を表わす）．ただし，ε は正の定数である．このような学習規則を **ヘッブの規則** (Hebb rule) と呼ぶ．活動している素子どうしをつなぐ結合を重くし，活動している素子と休止している素子をつなぐ結合を軽くするという規則であり，直感的にも納得しやすい．(4) 式に従えば，初期状態ではすべての結合荷重が 0 であるとしたとき，m 個の記憶パターンすべてを 1 度ずつ神経回路モデルに示した後には，結合荷重は

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \varepsilon\left(s_i^1 s_j^1 + s_i^2 s_j^2 + s_i^3 s_j^3 + \cdots + s_i^m s_j^m\right)\\ &= \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{m} s_i^\alpha s_j^\alpha \end{aligned} \tag{5}$$

となる．モデルにおいては，議論を簡単にするため，素子の自分自身への結合 w_{ii} は 0 にする．ヘッブの規則を考える場合には，実際に (4) 式で学習させなくとも，(5) 式で結合荷重を決めれば神経回路モデルの性質を議論する事ができる．

4　連想記憶モデル

連想記憶モデルとは，「連想的情報処理のモデル」の事であり，ある程度の雑音があってもそれを修正しなが

ら情報処理を進めてくれるような柔軟性のあるシステムの事である．連想記憶モデルの望ましい性質は，記憶パターンそのものが (2) 式の **安定状態** であると同時に，記憶パターンから少々ずれた状態からも記憶パターンへ **収束** してくれる事である．

ずれた状態から記憶パターンへ収束するとは，例えば，記憶パターン “の”（図 5）から少しずれた図 6 の状態を初期状態としても，図 5 の “の” を再現してくれる事である．

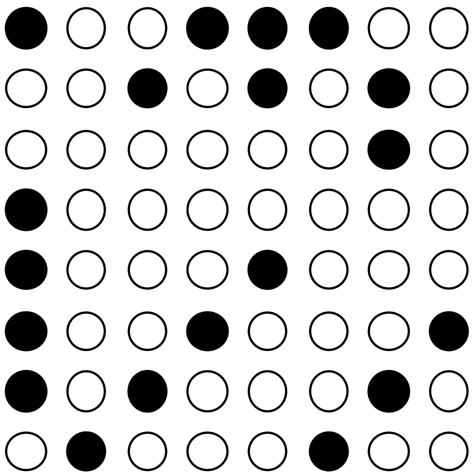

図 6: 記憶パターンからずれた例

なお，ここでいう安定状態には 2 種類の定義があり，それぞれ次のようになる．

1. **絶対安定状態**：状態 x が絶対安定状態であるとは，x を初期状態として (2) 式の変換を適用したとき，十分時間が経っても神経回路の状態が x のままである事をいう．
2. **相対安定状態**：状態 x が相対安定状態であるとは，x を初期状態として (2) 式の変換を適用したとき，十分時間が経ったときの神経回路モデルの状態が x にほぼ等しい事をいう．

5　モデルの性能の測り方

連想記憶を科学的に議論する際に,「少し」ずれたとか「ほぼ」近いというような表現では曖昧過ぎる．そこで，記憶パターンと神経回路モデルの状態の関係の尺度として，**類似度** や **距離** が使われる．

時刻 t における神経回路モデルの状態 $x(t)$ と第 α 番目の記憶パターン $\boldsymbol{s}^\alpha$ の間の類似度 $l_t^{(\alpha)}$ は次のように定義される．

$$l_t^{(\alpha)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i^\alpha x_i(t) \tag{6}$$

類似度はベクトル $x(t)$ と $\boldsymbol{s}^\alpha$ の方向余弦であり，-1 と 1 の間の値を取る．状態と記憶パターンが完全に一致していれば 1，全くずれていれば 0，互いに反転の関係ならば -1 となる．なお，着目している記憶パターンの番号が明らかな場合には類似度を単に l_t と書く事が多い．

同様に，時刻 t における神経回路モデルの状態 $x(t)$ と第 α 番目の記憶パターン $\boldsymbol{s}^\alpha$ の間の距離 $d_t^{(\alpha)}$ は次のように定義される．

$$d_t^{(\alpha)} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} |s_i^\alpha - x_i(t)| \tag{7}$$

距離は 0 と 1 の間の値を取り，神経回路の状態と記憶パターンが完全に一致していれば 0，全くずれていれば 0.5，互いに反転の関係ならば 1 となる．なお，着目している記憶パターンの番号が明らかな場合には距離を単に dt と書く事が多いのは類似度の場合と同じである．

なお，類似度と距離のあいだには

$$l_t = 1 - 2d_t \tag{8}$$

の関係がある．

さて，連想記憶モデルの望ましい性質:『記憶パターンそのものが (2) 式の安定状態であり，しかも記憶パターンからずれた状態からも記憶パターンへ収束してくれる』を，この類似度を用いて表現すれば,『初期状態の類似度が $l_{t=0} = 1$ であるならば任意の $t > 1$ に対して $l_t = 1$ であり，しかも，$0 < l_{t=0} < 1$ であるような初期状態に対しても十分大きな t に対して $l_t = 1$ となる』と言い換える事ができる．

また，これらの尺度を用いれば，モデルの性能の記述として，類似度が 0.7 以上ならば記憶パターンを再現できる，というような「科学的な」表現ができるようになる．

6　実　験

実験 1

神経回路モデルによる連想記憶のシミュレーションをしてみよう．

$n = 64$ 個の素子を 8×8 に並べて，その活動パターンとして記憶を割り当てる．各自好きなパターンを 4 つ作り，それをもとに (5) 式にならっ

て結合荷重 $w_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n,$ ただし $i\neq j)$, $w_{ii}=0(i=1,2,\ldots,n)$ を作る.(記憶パターンは本文にならって $\boldsymbol{s}^1,\boldsymbol{s}^2,\boldsymbol{s}^3,\boldsymbol{s}^4$ と書けばよいのだが，以下では表記を簡単にするため $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ と書こう.) ε は正の数なら何でもよいので，ここでは $\varepsilon=1$ としよう.

実験 2

同期的更新規則（(3) 式）を採用し，実験1で作った結合荷重を用いて，閾値 $h_i=0(i=1,2,\ldots,n)$（以下の実験も同様）として，先に決めた4つの記憶パターン $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ の安定性と収束性を調べよう.

［安定性］　本文でも述べたように，記憶パターンが安定であるかどうかは，$x(t=0)$ を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ あるいは $\boldsymbol{d}$ に等しくおいたときの $x(t)(t=1,2,\ldots)$ を (3) 式によって求め，類似度 l_t がどれだけ1に近いかを調べればよい.

［収束性］　記憶パターンからずれた状態を作り，それを $x(0)$ としたときの $x(t)(t=1,2,\ldots)$ を調べ，どの程度のずれならもとの記憶パターンが再生可能か（類似度が1になるか）を調べる.

記憶パターンからずれた状態からの再生結果を表現するには，横軸に時間，縦軸に類似度をとったグラフを描くと分かりやすい.

実験 3

上記の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ とは異なる記憶パターン $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}',\boldsymbol{d}'$ を用いて実験1，実験2と同様の実験をしてみよう.

実験 4

記憶パターンの数を $5,6,7,\ldots$ と増やしてゆくと記憶パターンの安定性はどう変化するか調べよう.

実験 5

記憶パターンの個数が同じでも，記憶パターンの集合が違えば安定性にも違いがでる（ある記憶パターン集合ならば10個まで安定であるのに，別の集合では5個で不安定化してしまうという事が起こる）. どのような性質の集合ならばより多くの個数まで安定になるのか考察する.

実験 6

結合荷重の学習の式（4）あるいは（5）において ε とすれば，w_{ij} はさまざまな整数値をとる. 記憶パターンの情報が蓄えられている w_{ij} の値を制限する事で情報を圧縮し，神経回路モデルにおける**情報圧縮**の効果を調べてみよう.

記憶パターンから w_{ij} を作り，その値が正ならば1に置き換え，0ならばそのまま0とし，負ならば -1 で置き換える（これで結合荷重は3値に圧縮される）. 実験2，実験3に対してこの情報圧縮を適用し，圧縮前の結果と比較する. そして，得られた結果の意味を考察する.

実験 7

非同期的更新規則を試してみよう. 実験2の［収束性］に関する実験を行ない，結果を考察する.

【非同期的更新の方法】

1. n 個の素子の中から1つをランダムに選ぶ.
2. 選ばれた素子について (2) 式の計算を行なう.
3. すべての素子の状態が変化しなくなるまで (1), (2) を繰り返す.

考察

以上の実験に関する感想や意見，考察をまとめよう.

7　補足と参考

【1】 今回の実験では各自が自由に記憶パターンを決めたが，他のひとと結果を比べたり，実験2と実験3を比較してみれば分かるように，どのようなパターンを記憶させるかによってモデルの性質が異なる.

定性的な議論に重点を置いた今回の実験のような場合ならこれでよいが，定量的に一般性のある考察をするにはあまり適切ではない.

モデルの一般的な性質を調べる手段のひとつに，ランダムな記憶パターンを用いて平均的な性質を調べるというものがある.

この方法を用いれば，記憶パターンの種類によって性質に違いはあるだろうが，平均的にはどのような性質を持つかが定量的に分かる. その種の理論的解析やシミュレーション解析によれば，素子の個数 n が1000程度以上の場合，記憶パターンが絶対安定状態であるための条件は，記憶パターンの個数をmとしたとき

$$m<\frac{n}{2\log n}$$

であり，相対安定状態であるための条件は

$$m<0.15n$$

である事が知られている（参考文献を参照）.

ただし，今回の実験では $n = 64$ なのでこの結果はそのままはあてはまらないので注意せよ.

【2】 本文にも述べたが，素子の状態 x_i として 1 と -1 を用いる代わりに 1 と 0 を用いる場合も多い（0 の方が「休止」というイメージには合う）．その場合には結合荷重を決める式は (5) 式ではなく

$$w_{ij} = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{m} (2s_i^\alpha - 1)(2s_j^\alpha - 1)$$

を用いた方がモデルの性能が高い.

【3】 ここで取り上げたモデルは時間も素子の状態も離散的であるが，一般には時間や素子の状態，あるいはその両方が連続的なモデルもある．両方が連続的な場合には，素子の入出力特性は図 7 のようになり，動作は微分方程式で表わされる.

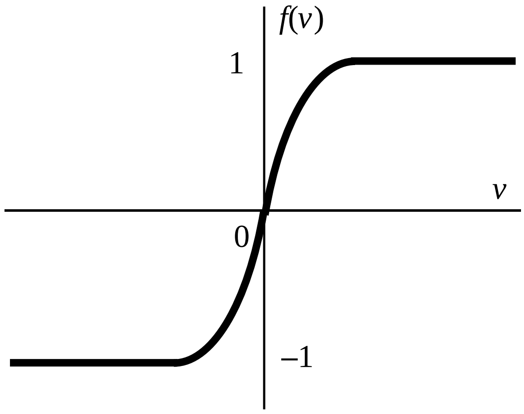

図 7: 連続的な特性

【4】 今回の実験ではパターンを記憶して再生するモデルのみを取り上げたが，入力パターン（例えば手書き数字）がどのような分類のパターンか（0 から 9 のどの数字か）を判別するモデル（パターン認識のモデル）も重要である.

この種のモデルのうち最も基本的なのが**パーセプトロン**である（参考文献を参照）．パーセプトロンは，入力パターンの例とその判別の正解（教師信号）の組を次々と呈示してゆくと“自ら”法則を身につけてゆくモデルである — ただし，必ずうまくゆくとは限らない.

参考文献

1. 中野　馨編著「ニューロコンピュータの基礎」（コロナ社）1990
   基礎から応用までこれ 1 冊で幅広く勉強できる．初心者にも分かりやすく書かれている.

2. 麻生英樹著「ニューラルネットワーク情報処理」（産業図書）1988
   神経回路モデルとその周辺（AI を含む）を全体的にあっさりと勉強するのに適している.

3. 甘利俊一著「神経回路網の数理」（産業図書）1978
   基礎をみっちりと勉強するのに適している.

4. ラメルハート他著「ＰＤＰモデル」（産業図書）1991（原著は 1986）
   神経回路モデルの人気を一気に高めるきっかけとなった本である．認知科学者が中心となって書いている.

5. 甘利俊一著「神経回路網モデルとコネクショニズム」（東京大学出版会）1989
   神経回路モデルのダイナミクスの理論を中心に書かれている.

6. P. D. Wasserman 著「ニューラル・コンピューティング—理論と実際—」（森北出版）1993（原著は 1989）
   神経回路モデルの研究成果について，幅広く，そして数式をあまり使わずに書かれている．講義「ニューロコンピュータ」の教科書.